DST n° 3 de :	MATHEMATIQUES EXPERTES
Date du DST : Mardi 5 mai 2026	**Durée :** 1h30
Nom du professeur : A. FAHLAOUI	**Classe :** TOPTMATEX1

Matériel autorisé :	L'usage de tout modèle de calculatrice, en mode examen, est autorisé.
Consignes particulières :	Soigner la présentation et la rédaction. Répondre à l'exercice 1 sur l'annexe page 4.

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse sans justifier, sauf pour la proposition 4 que l'on justifiera soigneusement.

1. **Proposition 1** : Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition 2 : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition 3** : Pour tout nombre réel α, $1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition 4 : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition 5 : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.

Exercice 2

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Donner les matrices M^2 et M^3.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que M est inversible et donner M^{-1}.

Partie B

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$, on considère les points A$(1\ ;\ p)$, B$(-1\ ;\ q)$ et C$(2\ ;\ r)$.
On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation
$y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors :
$$\begin{cases} -3p + q + 2r & \equiv & 0\ [6] \\ 3p - 3q & \equiv & 0\ [6] \\ 6p + 2q - 2r & \equiv & 0\ [6] \end{cases}$$
2. En déduire que $\begin{cases} q - r & \equiv & 0\ [3] \\ p - q & \equiv & 0\ [2] \end{cases}$.
3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q - r & \equiv & 0\ [3] \\ p - q & \equiv & 0\ [2] \\ \text{A, B, C ne sont pas alignés} \end{cases}$
alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.
   (a) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.
   (b) On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation
   $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

Exercice 3
Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon le modèle suivant :
- elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;
- elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1-p$.

On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.

On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.
Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :
- p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
- q_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0.

On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.
On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour tout entier n, on a : $X_{n+1} = AX_n$, et on admet que cela donne : $X_n = A^n X_0$.

1.(a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

(b) On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que : $A = PDP^{-1}$.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

(d) En déduire X_n et que $q_n = \dfrac{-(2p-1)^n + 1}{2}$.

2. On suppose dans cette question que p vaut $0,98$. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à $0,25$. Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission ?

NOM Prénom :

Barème :

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3
Total	6	7	7

Annexe de l'exercice 1 :

Proposition	1	2	3	4	5
Réponse (V ou F)					

Justification de la réponse concernant la proposition 4 :